Théorème de Riesz-Fischer

Théorème 1 (Riesz-Fischer)**.** *Pour tout $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, L^p est un espace de Banach.*

Démonstration.

Étape 1 : Supposons que $p = \infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^∞, montrons que cette suite converge dans L^∞. Par définition, on a :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}^\star,\ \exists\, N_\varepsilon \in \mathbb{N},\ \forall\, m, n \geqslant N_k,\ \ \|f_n - f_m\|_\infty \leqslant \frac{1}{k}$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^\star$, il existe donc un ensemble E_k négligeable tel que :

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_k,\ \forall\, m, n \geqslant N_k,\ |f_m(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

Enfin, en posant $E = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^\star} E_k$, on voit que, pour tout $x \in \Omega \setminus E$, la suite $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$. On note donc $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. En faisant tendre m vers $+\infty$, on obtient :

$$\forall\, x \in \Omega \setminus E_k,\ \forall\, n \geqslant N_k,\ |f(x) - f_n(x)| \leqslant \frac{1}{k}$$

Ainsi, $f \in L^\infty$ et, pour tout $n \geqslant N_k$, $\|f - f_n\|_{L^\infty} \leqslant \frac{1}{k}$. Par conséquent, $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_{L^\infty} = 0$.

Étape 2 : Supposons que $1 \leqslant p < \infty$.

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de Cauchy dans L^p. On extrait une sous-suite (f_{n_k}) telle que :

$$\forall\, k \in \mathbb{N}\ \left\|f_{n_{k+1}} - f_{n_k}\right\|_{L^p} \leqslant \frac{1}{2^k}$$

Posons $\tilde{f}_k = f_{n_k}$. On va montrer que $(\tilde{f}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge dans L^p. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère :

$$g_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)|$$

On obtient alors :

$$\|g_n\|_{L^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left\|\tilde{f}_{k+1}(x) - \tilde{f}_k(x)\right\|_{L^p} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} \leqslant 1$$

On déduit du théorème de convergence monotone que $g_n(x)$ converge presque partout sur Ω vers une limite finie, notée $g(x)$, avec $g \in L^p$. D'autre part, on a, pour tous $m \geqslant n \geqslant 2$:

$$|\tilde{f}_m(x) - \tilde{f}_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{m} |\tilde{f}_k(x) - \tilde{f}_{k-1}(x)| \leqslant g_m(x) - g_n(x) \leqslant g(x) - g_n(x) \leqslant g(x)$$

Il en résulte que, pour presque tout $x \in \Omega$, $(\tilde{f}_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans $\mathbb{R}$, donc converge vers une limite finie, notée $f(x)$. Or, on a, pour tout $n \geqslant 2$, $|f(x) - \tilde{f}_n(x)| \leqslant g(x)$. En particulier, $|f| \leqslant g + |\tilde{f}_k|$, donc $f \in L^p$. Par convergence dominée, on obtient $\lim_{k\to\infty} \left\|f - \tilde{f}_k\right\|_{L^p} = 0$. Ainsi $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de Cauchy dans L^p admettant une valeur d'adhérence $f \in L^p$, donc converge vers $f \in L^p$.

□

Références

[Bre] Haïm Brezis. *Analyse fonctionelle.* Masson